

Chapitre 3

Sommes et produits

Plan du chapitre

1	Sommes et produits.	1
1.1	Notations $\sum$ et $\prod$	1
1.2	Sommes et produits usuels	2
1.3	Opérations sur les sommes et produits	4
1.4	Relation de Chasles.	6
1.5	Télescopage	7
1.6	Changement d'indice dans une somme	8
1.7	Formule $a^n - b^n$	11
1.8	Astuces de calcul de produit	12
1.9	Notations étendues pour les sommes et produits.	12
2	Coefficients binomiaux et formule du binôme.	13
2.1	Coefficient binomial, combinaisons	13
2.2	Binôme de Newton	15
3	Sommes doubles	17
3.1	Définition, somme rectangulaire	17
3.2	Découplage de sommes rectangulaire	19
3.3	Somme triangulaire	20
4	Méthodes pour les exercices	22

1 Sommes et produits

1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Définition 3.1 – Sommes et produits de 0 à n

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. On notera leur somme et leur produit par :

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \text{"somme pour } i \text{ allant de 0 à } n \text{ des } a_i \text{"}$$

$$\prod_{i=0}^n a_i = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n \quad \text{"produit pour } i \text{ allant de 0 à } n \text{ des } a_i \text{"}$$

La lettre i est appelé l'indice de sommation. Il s'agit toujours d'un **nombre entier**. Le choix de la lettre i est

arbitraire, c'est une variable **muette** :

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\heartsuit=0}^n a_{\heartsuit} \quad \text{mais pas } \sum_{n=0}^n a_n \quad !!$$

Souvent, l'expression a_i est de la forme $f(i)$ avec f une fonction simple et explicite. Les termes à sommer / à multiplier sont alors simplement $f(0), f(1), \dots, f(n)$:

Exemple.

$$\sum_{i=0}^2 \underbrace{i^3}_{f(i)} = \underbrace{0^3}_{f(0)} + \underbrace{1^3}_{f(1)} + \underbrace{2^3}_{f(2)} = 9 \quad \prod_{k=0}^3 2^k = \dots\dots\dots$$

Dans la définition précédente, l'indice i commence à 0, mais il est très fréquent de le faire commencer à 1, 2 ou plus. On étend donc cette définition à un cadre plus général :

Définition 3.2 – Sommes et produits de m à n

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Soit $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n$ des nombres réels. On notera :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_{n-1} \times a_n$$

L'entier m joue le rôle de valeur de départ pour i et l'entier n celui de sa valeur d'arrivée. Lorsqu'on écrit $\sum_{i=m}^n (\dots)$ et $\prod_{i=m}^n (\dots)$, les entiers m et n doivent avoir été introduits au préalable pour que ces quantités soient bien définies.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=3}^6 (2k+1) = \dots\dots\dots$$



Sans les parenthèses dans la somme ci-dessus, le “+1” serait compris comme en dehors de la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^6 2k+1 &= \left(\sum_{k=3}^6 2k \right) + 1 \\ &= (\dots\dots\dots) + 1 \end{aligned}$$

1.2 Sommes et produits usuels

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\prod_{k=1}^n k = \dots\dots\dots$$

Théorème 3.3 – Sommes des k et des k^2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.

2.

Démonstration. On ne démontrera que la première formule. La deuxième formule se montre sur le même principe et est laissée en exercice.

□

Théorème 3.4 – Somme géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est sautée en première lecture, on y reviendra plus tard dans le cours.

□

Remarque. On évite d'écrire le nombre " 0^0 " car il ne vaut pas forcément 1, notamment dans le calcul de limites. Néanmoins, par *convention*, tout terme présent dans une somme ou un produit qui vaudrait 0^0 est traité comme un 1. Ainsi,

$$x = 0 \implies \sum_{k=0}^n x^k = 1 + 0^1 + 0^2 + \dots + 0^n = 1$$

Remarque. Plus généralement, on rappelle que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors

$$\text{” Somme de termes consécutifs de } (u_n) \text{ } = \text{ 1}^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \text{ ”}$$

1.3 Opérations sur les sommes et produits

Notation. Dans le théorème qui suit, on s'autorise exceptionnellement à écrire " $\sum a_i$ " et " $\prod a_i$ " sans préciser les valeurs de début et de fin pour i : on supposera que ce sont les mêmes valeurs partout. De plus, a_i et b_i designent des nombres réels quelconques pour chaque valeur de i pour lesquelles on calcule la somme / le produit.

Théorème 3.5 – Opérations avec $\sum$ et $\prod$

$$\sum (a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum (\lambda a_i) = \lambda \sum a_i$$

$$\prod (a_i b_i) = (\prod a_i) (\prod b_i)$$

Enfin, pour tout réel λ pour lequel chaque terme a_i^λ a un sens, on a :

$$\prod a_i^\lambda = (\prod a_i)^\lambda$$

Démonstration. On ne fera que les preuves des deux formules pour la $\sum$, en supposant qu'on somme pour i allant de 0 à n :

Sur le même principe :

$$\sum_{i=0}^n \lambda a_i = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) + \dots + (\lambda a_n) = \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i$$

□



Le réel λ ne doit pas dépendre de i si on veut appliquer les formules $\sum \lambda a_i = \dots$ et $\prod a_i^\lambda = \dots$!

3.6



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^n (i-3)(i+1)$.

Solution.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^n (n-3)(i+1)$.

Solution.

Remarque. Les deux formules sur le symbole $\sum$ du Théorème 3.5 entraînent que l'opération de somme est dite linéaire. Beaucoup d'opérations classiques sont linéaires : si f et g sont des fonctions dérivables :

$$\text{L'intégrale est linéaire : } \begin{cases} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \end{cases}$$

$$\text{La dérivation est linéaire : } \begin{cases} (f + g)' = f' + g' \\ (\lambda f)' = \lambda f' \end{cases}$$



En général $\sum a_i b_i \neq (\sum a_i)(\sum b_i)$. Contre-exemple :

$$\sum_{i=0}^{10} (1 \times 1) = \dots\dots \quad \text{mais} \quad \left(\sum_{i=0}^{10} 1 \right) \left(\sum_{i=0}^{10} 1 \right) = \dots\dots$$

1.4 Relation de Chasles

Remarque. Par convention, si $m > n$, on suppose que

$$\sum_{k=m}^n (\dots) = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^n (\dots) = 1$$

Exemple. Avec cette convention, les formules des sommes usuelles $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$ sont encore vraies si $n = 0$. Elles sont donc valides pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.7 – “Relation de Chasles”

Soit $m, r, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq r \leq n$. Soit $a_m, \dots, a_n$ des réels. On a :

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^r a_i + \sum_{i=r+1}^n a_i \quad \prod_{i=m}^n a_i = \left(\prod_{i=m}^r a_i \right) \times \left(\prod_{i=r+1}^n a_i \right)$$



Contrairement à la relation de Chasles pour les intégrales, il y a un “saut” d'indice (de r à $r + 1$). Si on gardait “ r ” des deux côtés, le terme a_r serait présent deux fois dans le membre de droite !

Remarque. Si $r = n$, les formules restent valides grâce à la convention ci-dessus :

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^n a_i + \underbrace{\sum_{i=n+1}^n a_i}_{=0} \quad \prod_{i=m}^n a_i = \left(\prod_{i=m}^n a_i \right) \times \underbrace{\left(\prod_{i=n+1}^n a_i \right)}_{=1}$$

3.8



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n} \min(i, n)$.

Solution.

Remarque. La relation de Chasles s'utilise aussi pour sortir un terme à la fois d'une somme :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k$$



Lorsqu'on extrait un terme d'une somme (ou d'un produit), il faut veiller à ce qu'on ne sorte pas ce terme d'une somme "vide" :

$$\sum_{i=n}^n i \stackrel{\text{vrai}}{=} n + \underbrace{\sum_{i=n+1}^n i}_{\text{somme "vide"}} \stackrel{\text{faux!}}{=} n + (n+1) + \sum_{i=n+2}^n i$$

1.5 Télésopage

Théorème 3.9 – Sommes / Produits télescopiques

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$ et $x_m, \dots, x_n$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_m$$

Si $x_m, \dots, x_n$ sont tous non nuls :

$$\prod_{k=m}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m}$$

Démonstration.

Sur le même principe, pour le produit :

$$\prod_{k=m}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{\cancel{x_n}} \times \frac{\cancel{x_n}}{\dots} \times \dots \times \frac{\dots}{\cancel{x_{m+1}}} \times \frac{\cancel{x_{m+1}}}{x_m} = \frac{x_{n+1}}{x_m}$$

□

Remarque. Plutôt que d'apprendre par cœur ces formules de télescopage, il est plus efficace de retenir :

$$\sum (x_{k+1} - x_k) = \text{"dernier terme"} - \text{"premier terme"}$$

où "dernier terme" se réfère au terme x_k avec l'indice k le plus grand quand on développe la somme, et "premier terme" celui dont l'indice k est le plus petit. L'idée est similaire pour $\prod \frac{x_{k+1}}{x_k}$, mais le $-$ est remplacé par un quotient.

Soit a et b deux réels positifs. On considère l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. On définit l'expression conjuguée de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ comme étant le réel $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Lorsqu'on dispose d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, l'expression conjuguée permet de faire disparaître les racines du dénominateur en multipliant en haut et en bas par l'expression conjuguée (cf exemple ci-dessous) :

3.10 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

Solution.

1.6 Changement d'indice dans une somme

Pour comprendre cette technique, rien ne vaut un exemple :

3.11



Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=n}^{3n} (k - n)$.

Solution.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons réécrit la somme $\sum_{k=n}^{3n} (k - n)$ en $\sum_{j=0}^{2n} j$. Il s'agit fondamentalement de la même somme, mais exprimée différemment. Fondamentalement, cela revient à poser $j = k - n$ dans la somme en faisant attention à changer les indices de départ et d'arrivée :

$$k = n \implies j = k - n = 0$$

$$k = 3n \implies j = k - n = 2n$$



Il n'y a que deux formes de changement d'indices qui soient autorisées :

$$j = k + \dots \in \mathbb{Z} \dots \quad \text{ou} \quad j = -k + \dots \in \mathbb{Z} \dots$$

Méthode – Changement d'indice

Partons d'une somme dont on note k l'indice de sommation : $\sum_{k=m}^n a_k$.

1. **Écrire sur la copie** $j = \pm k + \dots$ et/ou l'égalité "renversée" $k = \pm j + \dots$.
2. En utilisant l'une ou l'autre de ces expressions, remplacer tous les k dans a_k par des j .
3. Faire de même pour remplacer l'indice de départ " m " et celui d'arrivée " n " :

$$k = m \rightsquigarrow j = \pm m + \dots$$

$$k = n \rightsquigarrow j = \pm n + \dots$$

ce qui donnera :

$$\sum_{k=m}^n \rightsquigarrow \begin{cases} \sum_{j=m+\dots}^{n+\dots} & \text{si } j = k + \dots \\ \sum_{j=-n+\dots}^{-m+\dots} & \text{si } j = -k + \dots \end{cases} \quad (\text{inversion des bornes !})$$



Si on pose $j = -k + \dots$, les bornes doivent s'inverser. Si on écrivait " $\sum_{j=-m+\dots}^{-n+\dots} (\dots)$ ", il s'agirait d'une somme "vide" qui donnerait 0 (sauf si $m = n$).

3.12 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{2^k + 2^{n-k}}$. À l'aide d'un changement d'indice, montrer que $S_n = \frac{n+1}{2}$.

Solution.

Remarque (Symétrisation). On peut vérifier que, étant donné $m, n \in \mathbb{N}$ et $x_m, \dots, x_n$ des réels, on a :

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{j=m}^n x_{n+m-j} \quad \text{avec } j = n + m - k$$

1.7 Formule $a^n - b^n$

Théorème 3.13 – Factorisation de $a^n - b^n$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

Démonstration. La seconde inégalité découle du changement d'indice $j = n - 1 - k$. Montrons la première égalité.

□

Remarque. En partant de la seconde expression du Théorème 3.13 (avec j comme indice de sommation), on obtient sous forme développée :

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Exemple (Calcul **pratique** de $a^n - b^n$). Pour des valeurs de n “petites”, il est plus commode d'utiliser l'écriture ci-dessus plutôt que de revenir à la formule plus lourde du Théorème 3.13 :

- $a^2 - b^2 = \dots\dots\dots$
- $a^3 - b^3 = \dots\dots\dots$
- $a^4 - b^4 = \dots\dots\dots$

Exemple (Application **théorique** de $a^n - b^n$).

- La formule de $a^n - b^n$ permet de prouver la formule de la somme usuelle “ $\sum_{k=0}^n x^k$ ” du Théorème 3.4.

- La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut ensuite s'en déduire. Si on note q la raison, alors pour tout n , on a $u_n = u_0 q^n$. Si on somme les termes allant de m à n :

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_0 \sum_{k=m}^n q^k = \dots \text{laissé en exercice} \dots = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

1.8 Astuces de calcul de produit

Ces deux astuces permettent de ramener un calcul de produit à un calcul de somme.

- Astuce 1 : transformer des produit de puissances en une puissance d'une somme :

$$\prod_{k=0}^n 2^k = \dots \dots \dots$$

- Astuce 2 : calculer le logarithme du produit pour transformer le produit en somme.

$$\ln \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) = \sum_{k=0}^n \ln(a_k)$$

et si on arrive à calculer cette dernière somme, il suffira d'appliquer l'exponentielle pour conclure.

1.9 Notations étendues pour les sommes et produits

Définition 3.14

Soit I un ensemble quelconque. On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels (indexée par I) si pour tout $i \in I$, on a $a_i \in \mathbb{R}$.

Remarque. Se donner une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels revient à se donner une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque i de I associe le réel a_i .

Exemple. • Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est en fait qu'une famille de réels indexés par $\mathbb{N}$, ou encore une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à n de $\mathbb{N}$ associe le réel u_n .

- Lorsque $I = \{m, \dots, n\}$ avec $m \leq n$, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est en général notée $(a_i)_{m \leq i \leq n}$.

Hypothèse

Dans la suite, l'ensemble I est supposé être un sous-ensemble **fini inclus dans** $\mathbb{N}$.
De plus, sauf mention contraire, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ sont des familles de réels.

Un ensemble est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. On peut donc avoir par exemple $I = \{2, 4, 6, 8\}$, ou encore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I = \{0, 1, \dots, n\}$. On peut même avoir $I = \emptyset$, qui est un ensemble à zéro élément.

Notation. La somme et le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$ sont notés respectivement :

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i$$

(la lettre i reste muette ici)

Notation. Soit a et b deux entiers avec $a \leq b$. On notera

$$[a, b] = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$$

ce qui permet aussi de noter $\sum_{i \in [m, n]} a_i$ pour désigner $\sum_{i=m}^n a_i$

Remarque. Si $I = \emptyset$, on pose par convention :

$$\sum_{i \in \emptyset} (\dots) = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i \in \emptyset} (\dots) = 1$$

Cette écriture permet de traiter des cas plus généraux de sommation.

Notation. Enfin, on peut rajouter des conditions sur l'indice de sommation i avec une ligne supplémentaire sous la ligne de l'indice de départ :

- $\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ premier}}}^{100} (\dots)$: i parcourt tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.
- $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n (\dots)$: k parcourt tous les nombres pairs de 1 à n .

On peut également sommer sur des entiers négatifs :

- $\sum_{k=-100}^{100} (\dots)$: k parcourt tous les entiers de -100 à 100 .

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficient binomial, combinaisons

Définition 3.15 – Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre entier factorielle n , noté $n!$ est défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

On a en particulier $0! = 1$

Le fait que $0! = 1$ vient du fait que l'on a un produit "vide" : $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$.

Définition 3.16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dit " k parmi n ", de la façon suivante :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n \end{cases}$$

Si $0 \leq k \leq n$, on peut réécrire le coefficient binomial ainsi :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k(k-1) \cdots 1}$$

On notera que dans le membre de droite, il y a k termes au numérateur et k termes au dénominateur !

Exemple (Calcul **pratique** de $\binom{n}{k}$). Si on veut calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k , la formule ci-dessus est plus pratique que la formule lourde de la section 2.1 :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \dots\dots\dots \quad \binom{7}{3} = \dots\dots\dots$$

Remarque. Le nombre $\binom{n}{k}$ correspond également au nombre de sous-ensembles de cardinal k dans un ensemble de cardinal n . Par exemple, comme $\binom{4}{2} = 6$, cela signifie qu'un ensemble à 4 éléments $\{a, b, c, d\}$ possède exactement 6 sous-ensembles ayant 2 éléments :

$$\{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{a, d\} \quad \{b, c\} \quad \{b, d\} \quad \{c, d\}$$

Théorème 3.17 – Symétrie

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. On disjoint les cas :

- Si $k < 0$, on a $\binom{n}{k} = 0$ et par ailleurs, puisque $n - k > n$, on a $\binom{n}{n-k} = 0$.
- Si $k > n$, on a $\binom{n}{k} = 0$ et par ailleurs, puisque $n - k < 0$, on a $\binom{n}{n-k} = 0$.
- Si $0 \leq k \leq n$, on a aussi $0 \leq n - k \leq n$ donc :

□

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n-1} = \dots\dots\dots \quad \binom{n}{n-2} = \dots\dots\dots$$

Théorème 3.18 – Triangle de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. Si $k < 0$ ou $k \geq n$, le résultat découle immédiatement de la convention du coefficient binomial et du fait que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. On traite maintenant le cas $0 \leq k < n$.

□

Triangle de Pascal. Il permet de déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et de n . Comme $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, on peut placer les 1 comme ci-dessous. On peut aussi remplir d'autres cases en utilisant le fait que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Les cases restantes se déduisent du Théorème 3.18.

$\binom{n}{k}$	k					
	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1		1			
3	1			1		
4	1				1	
5	1					1

2.2 Binôme de Newton

Théorème 3.19 – Formule du binôme

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

Démonstration. La seconde égalité découle du changement d'indice $j = n - k$, puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{j}$. Il suffit donc de montrer la première égalité.



3.20 ★★ (Archi-classique !) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Solution.

Remarque. En partant de la seconde expression du Théorème 3.19 (avec j comme indice de sommation), on obtient sous forme développée :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Exemple (Calcul **pratique** de $(a+b)^n$). Si on veut calculer $(a+b)^n$ pour de petites valeurs de n , la formule ci-dessus est plus pratique que la formule lourde du Théorème 3.19. Les coefficients binomiaux qui interviennent sont ceux de la n -ième ligne du triangle de Pascal :

- $(a+b)^3 = \dots\dots\dots$ 3ème ligne du triangle : **1-3-3-1**
- $(a+b)^4 = \dots\dots\dots$ 4ème ligne du triangle : **1-4-6-4-1**

3 Sommes doubles

3.1 Définition, somme rectangulaire

Certaines familles peuvent être indexées par plusieurs indices, par exemple $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ est une famille de 6 éléments : $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{1j} + \sum_{j=1}^3 a_{2j} \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} \right) \end{aligned}$$

Grossièrement, on appelle somme double une somme qui fait intervenir deux indices de sommation, comme celle de la dernière ligne ci-dessus. On peut encore écrire $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} a_{ij}$.

Notation. Les parenthèses sont le plus souvent sous-entendues :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} \right)$$

Enfin, si les indices i et j parcourent le même ensemble, par exemple $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut noter la somme double :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

Définition 3.21

On appelle somme (double) rectangulaire une expression de la forme

$$\sum_{i=i_0}^m \sum_{j=j_0}^n a_{ij}$$

avec $i_0, j_0, m, n \in \mathbb{N}$ et (a_{ij}) une famille de réels.

Théorème 3.22 – **Interversion dans une somme rectangulaire**

On peut permuter les deux sommes d'une somme rectangulaire. Ainsi, avec les mêmes notations que la définition, on a :

$$\sum_{i=i_0}^m \left(\sum_{j=j_0}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=j_0}^n \left(\sum_{i=i_0}^m a_{ij} \right) \quad \text{ou encore} \quad \sum_{i=i_0}^m \sum_{j=j_0}^n a_{ij} = \sum_{j=j_0}^n \sum_{i=i_0}^m a_{ij}$$

Pour les sommes rectangulaires, cette interversion peut simplifier légèrement le calcul même si on peut en général s'en passer.

3.23



Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i + j)$.

Solution.

3.2 Découplage de sommes rectangulaire

Pour une somme double rectangulaire $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$, si on peut écrire $a_{ij} = b_i \times c_j$ (avec bien sûr b_i indépendant de j et c_j indépendant de i), on dispose d'un résultat intéressant qui permet de se ramener à un produit de sommes simples

Théorème 3.24 – Découplage de sommes doubles

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux familles de réels. Alors :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^m b_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)$$

Démonstration.

□

3.25



Calculer $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{2i-j}$.

Solution.

3.3 Somme triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une famille de réels.

- Dans le cas d'une somme rectangulaire $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, tous les réels a_{ij} sont sommés, de a_{11} à a_{nn} . Ainsi, le couple (i, j) prend toutes les valeurs de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Dans le cas d'une somme triangulaire, on somme uniquement les réels a_{ij} pour lesquels le couple (i, j) vérifie une relation ou un des indices est supposé inférieur à l'autre (éventuellement strictement), cf ci-dessous.

Avec la condition $i \leq j$, on somme les couples (i, j) marqués d'une croix ci-dessous :

n	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
j 3	$\times$	$\times$	$\times$		
2	$\times$	$\times$			zone
1	$\times$				$i > j$
	1	2	3	$\cdots$	n
			i		

Avec la condition $i < j$, on somme les couples (i, j) marqués d'une croix ci-dessous :

	n	$\times$	$\times$	$\cdots$	$\times$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
j	3	$\times$	$\times$		
	2	$\times$			zone
	1				$i \geq j$
		1	2	3	$\cdots$
				i	n

La somme des réels a_{ij} pour lesquels $i \leq j$ est notée :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$$

La somme des réels a_{ij} pour lesquels $i < j$ est notée :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$$

Cependant, cette écriture de la somme triangulaire n'est guère pratique si on souhaite calculer la somme (un peu comme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$ pour une somme rectangulaire). On va donc voir deux réécritures possibles.

Réécritures de somme triangulaire Prenons pour exemple la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}$.

- On peut faire une première somme pour i allant de 1 à n (car i prend ses valeurs pour au moins un terme du tableau), puis on fait une somme sur les indices j allant de 1 à n tels que $i \leq j$:

- On peut faire une première somme pour j allant de 1 à n (car j prend ses valeurs pour au moins un terme du tableau), puis on fait une somme sur les indices i allant de 1 à n tels que $i \leq j$:

Théorème 3.26 – Intversion dans une somme rectangulaire

On peut permuter les deux sommes d'une somme triangulaire selon la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=\boxed{\dots}}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\boxed{\dots}} a_{ij}$$

N'apprenez pas par cœur ces formules ! Il faut savoir les retrouver avec du bon sens et de l'entraînement.

Remarque. Face à une somme triangulaire, il est très fréquent qu'une interversion de sommes “débloque” le calcul.

3.27



Calculer $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$.

Solution.

4 Méthodes pour les exercices

Avant toute chose, il faut bien avoir en tête les règles de calcul avec les symboles $\sum$ et $\prod$, ce qui est permis et surtout ce qui ne l'est pas.

Méthode

Pour calculer une somme $\sum_{k=\dots}^{\dots} a_k$, on peut :

- Reconnaître une somme usuelle : $\sum_{k=0}^n 1$, $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$, ou encore $(a+b)^n$ et $a^n - b^n$.
- Faire apparaître du télescopage.
- Faire des réécritures, avec la linéarité, du Chasles ou des changements d'indice, pour se ramener à un des cas ci-dessus.

Méthode

Pour calculer un produit $\prod_{k=\dots}^{\dots} a_k$, on peut :

- Faire apparaître du télescopage.
- Calculer dans un premier temps $\ln \left(\prod_{k=\dots}^{\dots} a_k \right)$, ce qui fait apparaître une somme.
- Faire des réécritures.

Méthode

Pour calculer une somme double $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$, on peut :

- Employer la méthode directe : on calcule $\sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$ à i fixé, puis $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$.
- On intervertit les sommes puis on retente la méthode directe (attention si la somme est triangulaire).
- Si $a_{ij} = b_i c_j$ et que la somme est rectangulaire, on découple les sommes : on se ramène alors à un produit de deux sommes simples.